

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΕ ΒΑΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΚΑΙ ΤΥΠΟΥΣ

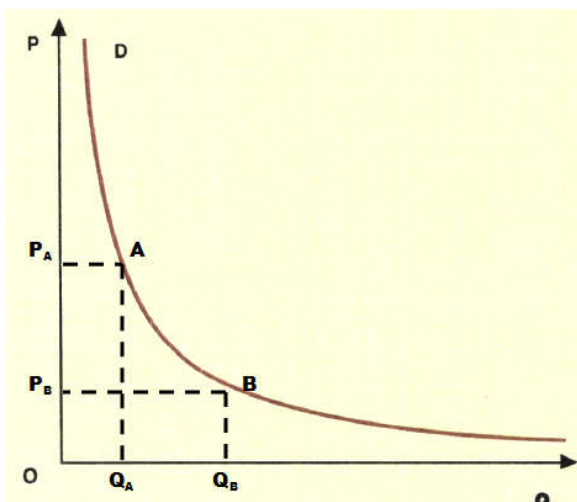
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

1. Κατά μήκος μιας ισοσκελούς υπερβολής, η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή, σημείου και τόξου, είναι σταθερή και ίση με -1.

Η μορφή της συνάρτησης είναι : $Q_D = \frac{A}{P}$

Σε μία ισοσκελή υπερβολή η συνολική δαπάνη των καταναλωτών παραμένει σταθερή και ίση με A

Δηλαδή ισχύει : $\Sigma\Delta = P_A \cdot Q_A = P_B \cdot Q_B = A$



► Θα αποδείξουμε ότι ισχύει : $E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = -1$

$$Q_D = \frac{A}{P} \Leftrightarrow Q_D = A \cdot P^{-1} \quad (1)$$

Ο λόγος $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ είναι η πρώτη παράγωγος της $Q_D = f(P)$ (2)

Άρα από τα (1) και (2) προκύπτει : $\frac{\Delta Q}{\Delta P} = A \cdot (-1) P^{-2} = -\frac{A}{P^2}$

$$E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{A}{P^2} \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{A}{PQ} = -\frac{A}{A} = -1 \quad (\text{γιατί } P \cdot Q = A)$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ : Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή σε κάθε σημείο της ισοσκελούς υπερβολής είναι σταθερή και ίση με -1 .

Σημειώνεται ότι αυτό ισχύει στην πράξη μόνο για απειροελάχιστες μεταβολές της τιμής και της ποσότητας.

► Θα αποδείξουμε ότι ισχύει : $E_D = \frac{Q_B - Q_A}{P_B - P_A} \cdot \frac{P_A + P_B}{Q_A + Q_B} = -1$

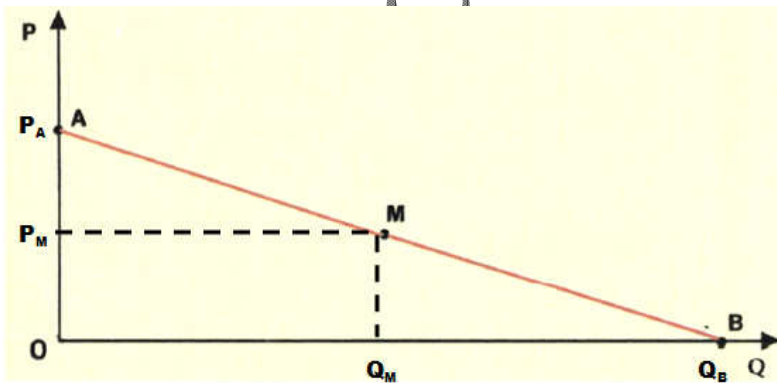
$$E_D = \frac{Q_B - Q_A}{P_B - P_A} \cdot \frac{P_A + P_B}{Q_A + Q_B} = \frac{P_A Q_B - P_A Q_A + P_B Q_B - P_B Q_A}{P_B Q_A - P_A Q_A + P_B Q_B - P_A Q_B} = \frac{P_A Q_B - P_B Q_A}{-(P_A Q_B - P_B Q_A)} = -1$$

Χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα $P_A Q_A = P_B Q_B$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ : Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή σε κάθε τόξο της ισοσκελούς υπερβολής είναι σταθερή και ίση με -1 .

2. Στο μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB μιας καμπύλης ζήτησης που τέμνει τους άξονες των τιμών και των ποσοτήτων, η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή (σημείου) είναι ίση με -1 .

Η μορφή της συνάρτησης είναι : $Q_D = \alpha + \beta \cdot P$



Στο σημείο A ισχύει $Q_D = 0 \Leftrightarrow 0 = \alpha + \beta \cdot P_A \Leftrightarrow P_A = -\frac{\alpha}{\beta}$

Στο σημείο B ισχύει $P = 0 \Leftrightarrow Q_{DA} = \alpha$

Στο σημείο M ισχύει $P_M = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{2\beta}$ και $Q_{DM} = -\alpha \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{2}$ (1)

Ο λόγος $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ είναι το αντίστροφο της κλίσης και ισούται με το συντελεστή β της συνάρτησης (2)

Άρα από τα (1) και (2) προκύπτει :

$$E_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{-\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\alpha}{2}} = -\frac{2\alpha\beta}{2\alpha\beta} = -1$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ : Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή στο μέσο M της ευθείας ζήτησης είναι ίση με -1 .

3. Στο μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB μιας καμπύλης ζήτησης που τέμνει τους άξονες των τιμών και των ποσοτήτων, η συνολική δαπάνη των καταναλωτών ($\Sigma\Delta$) μεγιστοποιείται.

Η μορφή της συνάρτησης είναι : $Q_D = \alpha + \beta \cdot P$

Η συνολική δαπάνη θα ισούται με $\Sigma\Delta = P \cdot Q = P \cdot (\alpha + \beta \cdot P) = \alpha \cdot P + \beta \cdot P^2$ (1)

► Θα αποδείξουμε ότι στο σημείο M ισχύει $\Sigma\Delta_M = P_M \cdot Q_M = \Sigma\Delta_{\max}$

Θα εξισώσουμε την πρώτη παράγωγο της (1) με το μηδέν και θα λύσουμε ως προς P :

$$\Sigma\Delta' = 0 \Leftrightarrow (\alpha \cdot P + \beta \cdot P^2)' = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 \cdot \beta \cdot P = 0 \Leftrightarrow P = -\frac{\alpha}{2\beta}$$

Όπως είδαμε στην απόδειξη 2, η συγκεκριμένη τιμή υφίσταται στο μέσο M

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ : Για την τιμή P_M του μέσου M , η συνολική δαπάνη των καταναλωτών μεγιστοποιείται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°

4. Για να μεγιστοποιήσει τα κέρδη της μία επιχείρηση, πρέπει να παράγει / προσφέρει εκείνη την ποσότητα προϊόντος στην οποία το οριακό κόστος MC (ανερχόμενο) ισούται με την τιμή (P).

► Θα αποδείξουμε ότι όταν $MC = P$, η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της

Κέρδη = Συνολικά Έσοδα – Συνολικό Κόστος = $TR - TC$

$TR = P \cdot Q$ και $TC = TC(Q)$

Θα εξισώσουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης των κερδών με το μηδέν:

(η πρώτη παράγωγος του TC είναι το $MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$)

$(\text{Κέρδη})' = 0 \Leftrightarrow [P \cdot Q - TC(Q)]' = 0 \Leftrightarrow P - MC = 0 \Leftrightarrow P = MC$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ : Μία επιχείρηση που καταφέρνει να παράγει εκείνη την ποσότητα προϊόντος στην οποία το οριακό κόστος εξισώνεται με την τιμή πώλησης, μεγιστοποιεί τα κέρδη της.

*** Το συγκεκριμένο αρχείο θα εμπλουτιστεί και με άλλες αποδείξεις**

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΜΑΡΙΝΟΣ οικονομολόγος – εκπαιδευτικός – www.economics.edu.gr